

الصفحة	2	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
	4		

التمرين 2: (3.5 نقط/اختياري) [إذا انجزت التمرين 2 فلا ينبغي لك أن تنجز التمرين 1]

نرمز بالرمز $(M_3(i), +, \times)$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 ذات معاملات حقيقية.

نذكر أن $(M_3(i), +, \times)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 9 و أن $(M_3(i), +, ')$ حلقة غير تبادلية وواحدية

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و وحدتها}$$

$$E = \left\{ M(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & -y & -y \\ 0 & z & 0 \\ y & x-z & x \end{pmatrix} \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

الجزء الأول:

1-أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء $(M_3(i), +, \times)$ 0.25

ب) حدد أساسا للفضاء $(E, +, \times)$ 0.5

2-أ) تحقق أن:

$$M(x, y, z)' M(x', y', z') = M(xx' - yy', xy' + yx', zz')$$

ب) بين أن $(E, +, ')$ حلقة تبادلية 0.5

الجزء الثاني:

نعتبر المجموعة الجزئية F من E للمصفوفات على الشكل $M(x, y, 0)$ حيث $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1- بين أن F زمرة جزئية للزمرة $(E, +)$ 0.25

2- ليكن z التطبيق المعرف من F^* نحو E بما يلي:

$$z(x, y) = (x + iy)j \quad ; \quad j^2 = -1$$

أ- بين أن z تشاكل من $(F^*, ')$ نحو $(E, ')$ 0.25

ب- استنتج أن $(F^*, ')$ زمرة تبادلية. $(F^* = F - \{O\})$ 0.5

ج- بين أن $(F, +, ')$ جسم تبادلي يتم تحديد وحدته. 0.5

$$3- أ) تحقق أن: $M(x, y, 0) = O$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 0.25$$

ب) استنتج أن لا أحد من عناصر المجموعة الجزئية F يقبل مقلوبا بالنسبة للضرب في $(M_3(i))$ 0.25

الصفحة	3	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
	4		

التمرين 3: (3.5 نقط/اجباري)

1- ليكن m عددا حقيقيا غير منعدم.

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} ، المعادلتين:

$$(E): z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0 \quad \text{و} \quad (F): z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2) = 0$$

0.5 1- حل في \mathbb{C} المعادلة (E)

0.25 2- أ) بين أن المعادلة (F) تقبل حلا تخيليا صرفا يتم تحديده.

0.5 ب) حل في \mathbb{C} المعادلة (F)

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; u, v)$

نعتبر النقطتين: $A(-1+im)$ و $B(-1-im)$

لتكن W منتصف القطعة $[AB]$ و A' منتصف القطعة $[OB]$ و B' منتصف القطعة $[OA]$

الدوران الذي مركزه W و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول A إلى $P(p)$ و الدوران الذي مركزه A' و زاويته

$\frac{\pi}{2}$ يحول B إلى $Q(q)$ و الدوران الذي مركزه B' و زاويته $\frac{\pi}{2}$ يحول O إلى $R(r)$

1.5 1- بين أن: $p = -1 + m$ و $q = \frac{1-i}{2}(-1-im)$ و $r = \bar{q}$

0.25 2- أ) تحقق أن: $q - r = -ip$

0.5 ب) استنتج أن: $OP = QR$ و أن المستقيمين (OP) و (QR) متعامدان.

التمرين 4: (13 نقطة/اجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0,1]$ بما يلي: $f(x) = x \ln(2-x)$

و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O; i, j)$

0.75 1- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن: $f'(x) = \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$; $x \in I$

0.5 ب) بين أن الدالة المشتقة f' تناقصية قطعاً على I

0.75 ج) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $a \in]0,1[$ بحيث: $f'(a) = 0$ و أن: $f(a) = \frac{a^2}{2-a}$

0.75 2- أ) ادرس تغيرات f ، ثم اعط جدول تغيراتها.

0.5 ب) بين أن المنحنى (C) مقعر.

0.5 ج) بين أن: $f(x) \leq f'(t)(x-t) + f(t)$; $(x \in I)$, $(t \in I)$

0.5 د) استنتج أن لكل x من I : $f(x) \leq x \ln 2$ و $f(x) \leq -x+1$

0.5 3- أنشئ المنحنى (C) (نأخذ: $\|i\| = 2cm$)

الصفحة	RS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
4		

4- احسب، ب cm^2 ، مساحة جزء المستوى المحصور بالمنحنى و المستقيمات المعرفة بالمعادلات: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$

0.75

الجزء الثاني:

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $I = [0,1]$ بما يلي: $f_n(x) = x^n \ln(2-x)$

1- (أ) تحقق أن f_n موجبة على I و أن $f_n(0) = f_n(1)$

0.5

(ب) بين أنه يوجد على الأقل $a_n \in]0,1[$ بحيث: $f'_n(a_n) = 0$

0.5

2- (أ) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على I و أن: $f'_n(x) = x^{n-1}g_n(x)$ حيث: $x \in I$

0.75

$$g_n(x) = n \ln(2-x) - \frac{x}{2-x}$$

(ب) بين أن الدالة g_n تناقصية قطعا على I

0.5

(ج) استنتج أن a_n وحيد.

0.5

3- نعتبر المتتالية $(a_n)_{n \geq 2}$ المعرفة حسب ما سبق.

(أ) بين أن: $f_n(a_n) = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_n^{n+1}}{2-a_n}$; $n \geq 2$ ، استنتج أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a_n) = 0$

1

(ب) بين أن: $g_n(a_{n+1}) = -\ln(2-a_{n+1})$; $n \geq 2$ ، استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا.

1

(ج) بين أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 2}$ متقاربة.

0.25

(د) بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$

0.5

الجزء الثالث:

لكل عدد صحيح طبيعي $n \geq 2$ ، نضع: $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$

1- بين أن المتتالية $(I_n)_{n \geq 2}$ تناقصية، استنتج أنها متقاربة.

0.75

2- باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: $I_n = \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{2-x} dx$

0.5

3- بين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ ، ثم استنتج أن: $(n \geq 2)$; $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

0.75

انتهى

./

الصفحة	1
4	
**1	

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة الاستدراكية 2020
- عناصر الإجابة -

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

RR 24

4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	الشعبة أو المسلك

انتباه: إذا أنجز المترشح التمرين الاختياريين (بشكل كلي أو جزئي) تحتسب له فقط أحسن نقطة محصلة من بين النقطتين و ليس مجموع النقطتين.

التمرين 1	عناصر الإجابة	سلم التنقيط
-1 (أ)	استعمال مبرهنة بوزو أو بطريقة مباشرة	0.5
(ب)	توظيف مبرهنة فيرما..... نعوض في $[p]$ $9^{p-1+q} \equiv 1 \pmod{p}$	1
-2 (أ)	لدينا $p < q < p-1$ و q عدد أولي	0.5
(ب)	يوجد $\hat{u}, \hat{v} \in \mathbb{Z}^2$ بحيث $uq = 1 + v(p-1)$ (مبرهنة بوزو) بما أن $[p] \mid 9^{uq} \equiv 1 \pmod{p}$ و $[p] \mid 9^{v(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ فإن $[p] \mid 9^0 \equiv 1 \pmod{p}$ إذن p يقسم $8 = 2^3$	0.5
-3 (أ)	$q \nmid 9 = 1$ و نستعمل مبرهنة فيرما	0.5
(ب)	نعوض p بالعدد 2 فنحصل على $[q] \mid 9^{q+1} \equiv 1 \pmod{q}$ و بما أن $[q] \mid 9^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ فإن $[q] \mid 9^2 \equiv 1 \pmod{q}$ إذن q يقسم $80 = 2^4 \cdot 5$ و $q > 2$ إذن $q = 5$	0.5

التمرين 2	عناصر الإجابة	سلم التنقيط
الجزء الأول		
-1 (أ)	الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي	0.25
(ب)	أسرة مولدة..... أسرة حرة.....	0.5
-2 (أ)	تحقق	0.25

الصفحة	RR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
2		
4		

0.5	(ب) زمرة تبادلية $(E,+)$ E مستقر بالنسبة للضرب في $M_3(\mathbb{C})$ قانون الضرب تجميعي و توزيعي بالنسبة للجمع حسب الاستقرار حسب 2- أ) قانون الضرب تبادلي في E	
الجزء الثاني		
0.25	الخاصية المميزة لزمرة جزئية	-1
0.25	φ تشاكل من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E, \times)	(أ)
0.5	$\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$ و زمرة تبادلية (\mathbb{C}^*, \times)	(ب)
0.5	$\varphi(1) = M(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ جسم تبادلي وحدته $(F, +, \times)$	(ج)
0.25	تحقق	(أ)
0.25	ليس هناك عنصر من F منتظم بالنسبة للضرب في $M_3(\mathbb{C})$	(ب)
-3		

سلم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين 3
0.5	حلا (E) هما: $z_1 = -1+im$ و $z_2 = \overline{z_1}$	-1
0.25	$2i$ هو الحل التخيلي الصرف	(أ) -2
0.5	الحلان الآخران للمعادلة (F) هما حلول (E) : z_2 و z_1	(ب)
0.5x3	قيم p و q و r بدلالة m	-1
0.25	التحقق	(أ) -2
0.25x2	$\arg \frac{q-r}{p} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ و $ p = q-r $	(ب)

الصفحة	RR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
3		
4		

سليم التقييط	عناصر الإجابة	التمرين 4
الجزء الأول:		
0.75	0.25..... f قابلة للاشتقاق على I 0.5..... حساب الدالة المشتقة	(أ)
0.5	الدالة المشتقة تناقصية قطعاً على I	(ب)
0.75	وجود و وحدانية α 0.5 0.25..... $f(\alpha) = \frac{\alpha^2}{2-\alpha}$	(ج)
0.75	0.5..... تغيرات f 0.25..... جدول تغيرات f	(أ)
0.5	المشتقة الثانية سالبة (أو المشتقة الأولى تناقصية قطعاً).	(ب)
0.5	يوجد المنحنى دائماً تحت جميع مماساته.	(ج)
0.5	حالة خاصة للمماسات عند النقط ذات الأفاصيل 0 و 1.	(د)
0.5	التمثيل المبياني.	-3
0.75	حساب المساحة: $I = \left(\int_0^1 f(x) dx \right) \cdot 4cm^2 = \left(2 \ln 2 - \frac{5}{4} \right) \cdot 4cm^2$	-4
الجزء الثاني:		
0.5	0.25..... التحقق من أن f_n موجبة. 0.25..... التحقق من أن $f_n(0) = f_n(1) = 0$	(أ)
0.5	تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة f_n على $[0;1]$	(ب)
0.75	0.25..... f_n قابلة للاشتقاق 0.5..... حساب f_n'	(أ)
0.5	الدالة g_n تناقصية قطعاً على I	(ب)
0.5	g_n تناقصية قطعاً (تباينية)، و منه وحدانية α_n	(ج)

الصفحة	RR 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة الاستدراكية 2020 - عناصر الإجابة - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
4		

1	0.5..... $f_n(\alpha_n)$ تعبير حساب النهاية: $0 < a_n < 1$ إذن $0 < \frac{(a_n)^{n+1}}{2 - a_n} < 1$ 0.5.....	(أ)	-3
1	0.5..... $g_n(\alpha_{n+1})$ تعبير رتابة المتتالية (α_n) 0.5.....	(ب)	
0.25	المتتالية تزايدية و مكبورة	(ج)	
0.5	حساب النهاية.	(د)	
الجزء الثالث:			
0.75	0.5..... (I_n) تناقصية المتتالية مصغرة إذن متقاربة 0.25	-1	
0.5	مكاملة بالأجزاء	-2	
0.75	0.5..... I_n تأطير حساب النهاية 0.25	-3	

./.